Methods for Solving P.D.E :-

[1] Direct Integration

① نستخدم هذه الطريقة إذا كانت P.D.E

- لا تحتوي على مشتقتين من الرتبة الثانية

U_{xx}, U_{yy} ، U_{xx}, U_{xy} ، U_{yy}, U_{xy}

- لا تحتوي على مشتقتين من الرتبة الأولى

U_x, U_y

* عند التكامل بالنسبة لـ x يكون الـ y ثابت وثابت التكامل الناتج دالة في y ← $f(y)$

* عند التكامل بالنسبة لـ y يكون الـ x ثابت وثابت التكامل دالة في x ← $f(x)$

② لو المعادلة التفاضلية تحتوي على U_x, U أو U, U_y وكانت على الصورة الآتية :-

$$U_x + P(x,y)U = Q(x,y)$$
$$I = e^{\int P(x,y)dx}$$
$$U = \frac{1}{I}\left[\int Q(x,y)\cdot I\,dx + f(y)\right]$$

$$U_y + P(x,y)U = Q(x,y)$$
$$I = e^{\int P(x,y)dy}$$
$$U = \frac{1}{I}\left[\int Q(x,y)\cdot I\,dy + f(x)\right]$$

③ لو المعادلة التفاضلية احتوت على U_{xy}, U_y / U_{yy}, U_y

- نكامل بالنسبة لـ y أولاً ثم بالنسبة لـ x
- أو نضع $U_y = Z$ ، $U_{xy} = Z_x$ ، $U_{yy} = Z_y$

لو المعادلة التفاضلية احتوت على U_{xy}, U_x / U_{xx}, U_x

- نكامل بالنسبة لـ x أولاً ثم بالنسبة لـ y
- أو نضع $U_x = Z$ ، $U_{xy} = Z_y$ ، $U_{xx} = Z_x$

④ لو المعادلة التفاضلية احتوت على بشرط أن تكون المعاملات ثوابت

- U_{xx}, U_x, U ← نشتغل بالـ ordinary مع ملاحظة أن الثوابت $f(y)$
- U_{yy}, U_y, U ← نشتغل بالـ ordinary مع ملاحظة أن الثوابت $f(x)$

ex ① $U_{xx} = \dfrac{y^2}{(x+1)^2} = y^2(x+1)^{-2}$

$$U_x = -y^2(x+1)^{-1} + f(y)$$
$$U = -y^2\ln(x+1) + f(y)\cdot x + g(y)$$

#

② $U_{yy} = \frac{y\sinh y}{x+1} + \frac{1}{y} + 2$

$U_y = \frac{1}{x+1}[y\cosh y - \sinh y] + \ln y + 2y + f(x)$

$U = \frac{1}{x+1}[y\sinh y - \cosh y - \cosh y] + y[\ln y - 1] + y^2 + f(x)y + g(x)$

#

y	$+$	$\sinh y$
1	$-$	$\cosh y$
0		$\sinh y$

y	$+$	$\cosh y$
1	$-$	$\sinh y$
0		$\cosh y$

③ $U_{xx} + \frac{U_x}{x} = 4x^2 + 2y^2$

$u = x$, $dv = U_{xx}$

$du = 1$, $v = U_x$

$xU_{xx} + U_x = 4x^3 + 2xy^2$

$xU_x - U + U = x^4 + x^2y^2 + f(y)$

$U_x = \frac{1}{x}[x^4 + x^2y^2 + f(y)]$

$U_x = x^3 + xy^2 + \frac{1}{x}f(y)$

$U = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \ln x\, f(y) + g(y)$

#

another SoL

Let $z = U_x$, $z_x = U_{xx}$

$z_x + \frac{1}{x}z = 4x^2 + 2y^2$

$I = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$

$z = \frac{1}{x}\int (4x^3 + 2xy^3)\,dx + f(y)$

$= \frac{1}{x}[x^4 + x^2y^2 + f(y)]$

$U_x = x^3 + xy^2 + \frac{1}{x}f(x)$

$U = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \ln x\, f(x) + g(y)$

#

④ $U_{xy} = 6x^2y$, $U(x,0) = \sin x$, $U(\pi,y) = \ln(y+3)$

$U_x = 3x^2y^2 + f(x)$

$U = x^3y^2 + F(x) + g(y)$

$F(\pi) = -g(0)$

1- $U(x,0) = F(x) + g(0) = \sin x \rightarrow F(x) = \sin x - g(0)$

2- $U(\pi,y) = \pi^3y^2 + F(\pi) + g(y) = \ln(y+3)$

$g(y) = \ln(y+3) - \pi^3y^2 - F(\pi)$

$g(y) = \ln(y+3) - \pi^3y^2 + g(0)$

$u = x^3y^2 + \sin x + \ln(y+3) - \pi^3 y^2 + \cancel{g(0)}$

$u = x^3y^2 + \sin x + \ln(y+3) - \pi^3 y^2$

#

(5) $y\,u_{xy} + 2u_x = 0 \quad , u(x,1) = x^2+1 \, , u(0,y) = e^y$

$y\,u_y + 2u = f(y)$

$u_y + \frac{2}{y} u = \frac{1}{y} f(y)$

$I = e^{\int \frac{2}{y} dy} = e^{2\ln y} = y^2$

$\therefore u = \frac{1}{y^2}\left[\int y^2 \cdot \frac{1}{y} f(y)\,dy + f(x)\right]$

$= \frac{1}{y^2}\left[\int y f(y)\,dy + f(x)\right]$

$u = \frac{1}{y^2}\left[g(y) + f(x)\right]$

1- $u(x,1) = 1[g(1) + f(x)] = g(1) + f(x) = x^2+1$

$f(x) = x^2 + 1 - g(1) \rightarrow f(0) = 1 - g(1)$

2- $u(0,y) = \frac{1}{y^2}[g(y) + f(0)] = e^y$

$\therefore g(y) = y^2 e^y - f(0)$

$\therefore u = \frac{1}{y^2}\left[y^2e^y - f(0) + x^2 + 1 - g(1)\right]$

$= \frac{1}{y^2}\left[y^2 e^y - \cancel{1} + \cancel{g(1)} + x^2 + \cancel{1} - \cancel{g(1)}\right]$

$u = e^y + \frac{x^2}{y^2}$ #

(6) $u_{xx} - 5u_x + 6u = e^{(x+y)}$

$u_h \rightarrow \alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0$

$\alpha_1 = 2 \, , \alpha_2 = 3$

$u_h = f(y)\,e^{2x} + g(y)\,e^{3x}$

$u_p \rightarrow u_p = \frac{1}{(D-2)(D-3)}\{e^{(x+y)}\}$

$= e^y\left[\frac{1}{(D-2)(D-3)}\{e^x\}\right]$

$= e^y \frac{1}{2} e^x = \frac{1}{2} e^{x+y}$

$u_g = u_h + u_p = f(y)\,e^{2x} + g(y)\,e^{3x} + \frac{1}{2} e^{x+y}$

#